数理解析研究所講究録
264巻 1976年 176-192

Subdifferential の発展方程式について

東大 理学部　　山田義雄

§1. 序

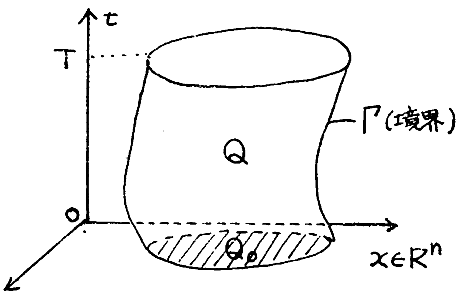
本講演では，実 Hilbert 空間 H において，次の型の非線型発展方程式を考える．

(E)　　$\frac{d}{dt}u(t) + \partial\varphi^t(u(t)) \ni f(t)$,　$0 \leq t \leq T$.

ここで，各 $t \in [0, T]$ に対して，$\varphi^t : H \longmapsto (-\infty, +\infty]$ ($\varphi^t \not\equiv +\infty$) は下半連続な凸関数で，$\partial\varphi^t$ はその subdifferential とする．

この型の方程式は，最初，Brezis [4] によって，$\varphi^t = \varphi$ が t に無関係な場合を取り扱われ，(E)の解の滑らかさを含めて様々の結果が得られた．その後，φ^t が t に依存する場合には，特に，$D(\varphi^t) = \{u \in H ; \varphi^t(u) < +\infty\}$ が t に無関係であることを仮定して，Watanabe [13]，Attouch-Damlamian [2]，Maruo [10] らによって Brezis の結果が拡張された．さらに，$D(\varphi^t)$ が t に依存する場合も，方程式(E)は多くの人々によって取り扱われ，種々の結果が得られている．(Attouch-Benilan-Damlamian-Picard [1], Biroli [3], Brezis [5], Kenmochi [8], Kenmochi-Nagai [9], Moreau [11], Peralba [12] 等)

我々が，方程式(E)において問題とするのは，一般に，$D(\varphi^t)$ が t に依存する場合であり，特に，境界が時間的に変化する，次のような非線型問題



$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f & \text{on } Q \\ u = 0 & \text{on } \Gamma \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{on } Q_0 \end{cases}$$

にも応用できるようにすることを目的とする．

さて，ここで，H上の下半連続な凸関数の族 $\{\varphi^t\}_{0\le t\le T}$ に関する仮定を述べよう．

仮定A. $r>0$, $t_0 \in [0,T]$ とする．このとき，各 $x_0 \in D(\varphi^{t_0})$, $\|x_0\| \le r$, に対して，次を満たす $x : [0,T] \longmapsto H$ が存在する．

(i) $\|x(t) - x_0\| \le |g_r(t) - g_r(t_0)|\,(\varphi^{t_0}(x_0) + K_r)^{\frac{1}{2}}, \qquad 0 \le t \le T.$

(ii) $\varphi^t(x(t)) \le \varphi^{t_0}(x_0) + |h_r(t) - h_r(t_0)|\,(\varphi^{t_0}(x_0) + K_r), \qquad 0 \le t \le T.$

但し，K_r は正定数，g_r, h_r は $[0,T]$ 上の絶対連続関数で，$g_r' \in L^2(0,T)$ を満たす．

定義. $u : [0,T] \longmapsto H$ が，(E)の強い解であるとは，

(i) $u \in C([0,T];H)$. (ii) $(0,T)$ の任意のcompact集合上，u は強

絶対連続. (iii) a.e. $t\in(0,T)$ で, $u(t)\in D(\partial\varphi^t)$, かつ,

$$\frac{d}{dt}u(t)+\partial\varphi^t(u(t))\ni f(t).$$

を満たすことをいう.

以上の仮定, 定義の下で, 次の定理が成立する.

定理. $a\in\overline{D(\varphi^0)}$, $f\in L^2(0,T;H)$ とする. このとき, (E)の強い解 u で, $u(0)=a$ となるものが一意に存在し, しかも, 次の性質をもつ.

(i) すべての $t\in(0,T]$ について, $u(t)\in D(\varphi^t)$ であり, $\varphi^t(u(t))\in L^1(0,T)$, かつ, $t\varphi^t(u(t))\in L^\infty(0,T)$ である. さらに, 任意の $\delta>0$ に対して, $\varphi^t(u(t))$ は, $[\delta,T]$ 上絶対連続である.

(ii) $t^{\frac{1}{2}}du/dt\in L^2(0,T;H)$.

特に, $a\in D(\varphi^0)$ ならば, u は (i), (ii) の代わりに, 次を満たす.

(i)′ すべての $t\in[0,T]$ について, $u(t)\in D(\varphi^t)$ であり, $\varphi^t(u(t))$ は, $[0,T]$ 上, 絶対連続である.

(ii)′ u は $[0,T]$ 上, 強絶対連続, かつ, $du/dt\in L^2(0,T;H)$.

注意 1. 仮定 A は, $D(\varphi^t)=D$ が t に依存しない場合の, [2], [13] の仮定の一般化になっている.

注意 2. Kenmochi [8] は, 仮定 A を少し弱めて, 方程式(E)を変分不等式の形で取り扱い, ‘semi-discretisation 法’ によって,

上記定理より，いくらか弱い結果を導いた．

§2. 準備

この節では，凸関数に関する既知の結果をいくつか述べるが，詳しい証明は，[6]，[13]等を参照していただきたい．

$\varphi : H \longmapsto (-\infty, +\infty]$ $(\varphi \not\equiv +\infty)$ を下半連続な凸関数であるとし，

$$D(\varphi) = \{ u \in H ;\ \varphi(u) < +\infty \}$$

とおく．各 $u \in D(\varphi)$ に対して，集合

$$\partial\varphi(u) = \{ w \in H ;\ \varphi(v) - \varphi(u) \geqslant (w, v-u),\ {}^{\forall} v \in D(\varphi) \}$$

を，φ の u における <u>subdifferential</u> と言い，$\partial\varphi$ の定義域 $D(\partial\varphi)$ を，$D(\partial\varphi) = \{ u \in D(\varphi) ;\ \partial\varphi(u) \neq \phi \}$ で定義する．このとき，$\partial\varphi$ は H における極大単調作用素であり，$\overline{D(\varphi)} = \overline{D(\partial\varphi)}$ となることはよく知られている．よって，$\lambda > 0$, $u \in H$ に対して，$J_\lambda u \equiv (I + \lambda\partial\varphi)^{-1} u$ は意味を持つ．

一方，$\lambda > 0$, $u \in H$ に対して，

$$\varphi_\lambda(u) = \inf_{v \in H} \left\{ \varphi(v) + \frac{1}{2\lambda} \| u - v \|^2 \right\} \tag{2.1}$$

によって φ_λ を定義すれば，(2.1) の inf は $J_\lambda u$ で達成されることが知られている．従って，(2.1) より，

$$\varphi(u) \geqslant \varphi_\lambda(u) = \varphi(J_\lambda u) + \frac{1}{2\lambda} \| u - J_\lambda u \|^2 \geqslant \varphi(J_\lambda u) \tag{2.2}$$

(2.3) $$\varphi(v)-\varphi(J_\lambda u) \geqq \lambda^{-1}(u-J_\lambda u, v-J_\lambda u), \quad \forall v\in D(\varphi)$$

が成立する．さらに，φ_λ は Fréchet 微分可能な凸関数で，その Fréchet 微分 $\partial\varphi_\lambda$ は $\partial\varphi$ の Yosida 近似 $(\partial\varphi)_\lambda=\lambda^{-1}(I-J_\lambda)$ に一致することが知られている．より詳しく述べれば，

(2.4) $$0\leqq \varphi_\lambda(v)-\varphi_\lambda(u)-\frac{1}{\lambda}(u-J_\lambda u, v-u)\leqq \frac{1}{\lambda}\|u-v\|^2, \quad \forall u,v\in H$$

が成立する．よって，今後，$(\partial\varphi)_\lambda$ の代わりに，$\partial\varphi_\lambda$ で表わすことにする．最後に，(2.2) より，任意の $u\in H$ について，

(2.5) $$\lim_{\lambda\downarrow 0}\varphi_\lambda(u)=\varphi(u)$$

が成立することを注意しておく．

§3. 補題．

定理の証明に入る前に，必要な補題をいくつか述べる．

補題 3.1．仮定 A の下で，ある正定数 C_1, C_2 が存在して，

(3.1) $$\varphi^t(x)+C_1\|x\|+C_2\geqq 0$$

が $\forall t\in[0,T]$, $\forall x\in H$ に対して成立する．

［証明］最初に，$v_0\in D(\varphi^0)$ を固定すれば，仮定 A より，$[0,T]$ 上の H-値関数 v で，$v(0)=v_0$，かつ，$\forall t\in[0,T]$ において

(3.2) $$\|v(t)\|\leqq r_0-1, \quad \varphi^t(v(t))\leqq M_0$$

となるものが存在することに注意する．但し，r_0, M_0 は正定数．一方，仮定 A において，g_{r_0}, h_{r_0} が共に定数関数になるこ

とはないとしてかまわないから，仮定Aより，$x\in H, \|x\|\leq r_0$ のとき，

$$\varphi^t(x)+K_{r_0}\geqslant 0 \quad , \quad \forall t\in[0,T]$$

となることがわかる．他方，$\|x\|\geqslant r_0$ のとき，$\alpha(t)=\|x-v(t)\|^{-1}$，$u(t)=\alpha(t)x+(1-\alpha(t))v(t)$ とおけば，$0<\alpha(t)\leqslant 1$，$\|u(t)\|\leqslant r_0$ であるから，

$$\alpha(t)\varphi^t(x)+(1-\alpha(t))\varphi^t(v(t))\geqslant\varphi^t(u(t))\geqslant -K_{r_0} \quad , \quad \forall t\in[0,T]$$

を得る．この不等式と (3.2) より (3.1) を得る．　　　　(証明終)

<u>補題 3.2.</u> (cf. Kenmochi [8, lemma 3.3 及びその系]) 仮定Aの下で，正定数 δ, r_0, M を適当に選べば，各 $t\in[0,T]$ に対して，$[t, \min\{t+\delta, T\}]$ 上の強絶対連続関数 v_t を

$$\|v_t(s)\|\leqslant r_0 \quad , \quad \varphi^s(v_t(s))\leqslant M \quad , \quad \forall s\in[t,\min\{t+\delta,T\}]$$

を満たすように構成することができる．

[証明] [8] における方法を利用する．$v_0\in D(\varphi^0)$ を固定し，仮定Aを用いて，(3.2) を満たす $v:[0,T]\longrightarrow H$ をとる．次に，

$$M=\exp\left(\int_0^T|h_{r_0}'(t)|dt\right)\left(M_0+K_{r_0}\int_0^T|h_{r_0}'(t)|dt\right) \tag{3.3}$$

とおき，δ を次で定義する．

$$\delta=\left(\int_0^T|g_{r_0}'(t)|^2dt\right)^{-1}(M+K_{r_0})^{-1} . \tag{3.4}$$

強絶対連続関数を構成するため，任意の $t_0\in[0,T]$ をとり固定する．(便宜上，$t_0\leqslant T-\delta$ とする．) 次に，$\varepsilon_n=\frac{\delta}{n}$ とおき，点列 $\{u_n^k\}_{k=0}^n$ ($\|u_n^k\|\leqslant r_0$, $u_n^k\in D(\varphi^{t_0+k\varepsilon_n})$, $k=0,1,\cdots,n$) を，$u_n^0=v(t_0)$ から始めて，u_n^{k-1} に対して仮定Aを用い，順次，u_n^k を，

$$(3.5)\qquad \|u_n^k - u_n^{k-1}\| \le |g_{r_0}(t_0+k\varepsilon_n) - g_{r_0}(t_0+(k-1)\varepsilon_n)|\,(\varphi^{t_0+(k-1)\varepsilon_n}(u_n^{k-1}) + K_{r_0})^{\frac{1}{2}},$$

$$(3.6)\qquad \begin{aligned}\varphi^{t_0+k\varepsilon_n}(u_n^k) \le \varphi^{t_0+(k-1)\varepsilon_n}(u_n^{k-1}) &+ |h_{r_0}(t_0+k\varepsilon_n) - h_{r_0}(t_0+(k-1)\varepsilon_n)| \times \\ &\times (\varphi^{t_0+(k-1)\varepsilon_n}(u_n^{k-1}) + K_{r_0}),\end{aligned}$$

を満たすように選ぶ. 実際, 上のように $\{u_n^k\}$ を構成できることは, (3.3), (3.4) に注意すればわかる. 又,

$$(3.7)\qquad \|u_n^k - v(t_0)\| \le 1, \quad \varphi^{t_0+k\varepsilon_n}(u_n^k) \le M, \quad k = 0, 1, \cdots\cdots, n,$$

が成立することも同時に導かれる.

次に, $[t_0, t_0+\delta]$ 上の強絶対連続関数 u_n を

$$(3.8)\qquad u_n(t) = \frac{t_0+i\varepsilon_n - t}{\varepsilon_n}u_n^{i-1} + \frac{t-(t_0+(i-1)\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}u_n^i, \quad \text{if } t \in [t_0+(i-1)\varepsilon_n, t_0+i\varepsilon_n]$$

によって定義すれば, (3.2), (3.5), (3.7), (3.8) より, u_n は

$$(3.9)\qquad \|u_n(t)\| \le r_0, \qquad t_0 \le t \le t_0+\delta,$$

$$(3.10)\qquad \|u_n(t) - u_n(s)\| \le (M+K_{r_0})^{\frac{1}{2}}\int_{s-\varepsilon_n}^{t+\varepsilon_n} |g_{r_0}'(\tau)|\,d\tau, \qquad t_0 \le s \le t \le t_0+\delta,$$

$$(3.11)\qquad \int_{t_0}^{t_0+\delta} \|u_n'(t)\|^2 dt \le (M+K_{r_0})\int_{t_0}^{t_0+\delta} |g_{r_0}'(t)|^2 dt,$$

を満たす. (3.9), (3.11) より $\{u_n\}$, $\{u_n'\}$ は共に $L^2(t_0, t_0+\delta; H)$ の有界集合であるから, $\{u_n\}$ の適当な部分列 $\{u_{n'}\}$ をとれば, $u_{n'}$, $u_{n'}'$ はある u, u' に共に $L^2(t_0, t_0+\delta; H)$ で弱収束し, さらに, 各点 $t \in [t_0, t_0+\delta]$ で, $u_{n'}(t)$ は $u(t)$ に弱収束するようにできる. 簡単のため, この部分列 $\{u_{n'}\}$ も $\{u_n\}$ で表わす. ここで, 各 $t \in [t_0, t_0+\delta]$ を

固定して，$t_n = t_0 + \left[\frac{t-t_0}{\varepsilon_n}\right]\varepsilon_n$（$[\cdot]$ は Gauss 記号）とおく．(3.7) より，$\varphi^{t_n}(u_n(t_n)) \leq M$ であるから，仮定 A より，$\hat{u}_n \in D(\varphi^t)$ を，

$$\|\hat{u}_n - u_n(t_n)\| \leq |g_{r_0}(t) - g_{r_0}(t_n)|(M + K_{r_0})^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi^t(\hat{u}_n) \leq \varphi^{t_n}(u_n(t_n)) + |h_{r_0}(t) - h_{r_0}(t_n)|(M + K_{r_0}),$$

を満たすようにとれる．一方，$\mathrm{w}\text{-}\lim_{n\to\infty} \hat{u}_n = u(t)$ より，

$$\varphi^t(u(t)) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi^t(\hat{u}_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi^{t_n}(u_n(t_n)) \leq M, \quad t \in [t_0, t_0+\delta].$$

最後に，u の強絶対連続性を示す．そのために，Mazur の定理を適用すれば，$\{u_n\}$ の適当な凸線型結合

$$v_n = \sum_{i=0}^{j_n} \alpha_n^i u_{n+i}, \qquad \alpha_n^i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{j_n} \alpha_n^i = 1.$$

をとることによって，$n\to\infty$ のとき，v_n は u に，v_n' は u' に，それぞれ $C([t_0, t_0+\delta]; H)$，$L^2(t_0, t_0+\delta; H)$ で強収束するようにできることに注意する．一方，(3.10) より，$t_0 \leq s \leq t \leq t_0+\delta$ において

$$\|v_n(t) - v_n(s)\| \leq (M + K_{r_0})^{\frac{1}{2}} \int_{s-\varepsilon_n}^{t+\varepsilon_n} |g_{r_0}'(\tau)|\,d\tau$$

が成立するから，$n\to\infty$ として，u の強絶対連続性がわかる．

$t_0 \in [0, T]$ は任意であったから，(3.2), (3.3), (3.4) で r_0, M, δ を決めれば，補題の主張の正しいことがわかる． (証明終)

ここで，$\lambda > 0$，$x \in H$ に対して，$J_\lambda^t x = (I + \lambda\partial\varphi^t)^{-1}x$，$\varphi_\lambda^t(x) = \varphi^t(J_\lambda^t x) + \frac{1}{2\lambda}\|x - J_\lambda^t x\|^2$ とおけば，次の補題を得る．

<u>補題 3.3.</u> $\lambda > 0$，$x \in H$ とする．このとき，仮定 A の下で，

(i) $J_\lambda^t x$ は $0 \leq t \leq T$ について強連続，かつ，ある正定数 C_3 が

存在して

(3.12) $$\|J_\lambda^t x\| \leq 2\|x\| + C_3$$

が，$^\forall x \in H$，$0 < {}^\forall\lambda \leq 1$，$0 \leq {}^\forall t \leq T$ に対して成立する．

(ii) $\varphi_\lambda^t(x)$ は $0 \leq t \leq T$ について絶対連続，かつ，$0 \leq s \leq t \leq T$ において

(3.13)
$$|\varphi_\lambda^t(x) - \varphi_\lambda^s(x)| \leq |h_r(t) - h_r(s)|[\max\{\varphi_\lambda^t(x), \varphi_\lambda^s(x)\} + K_r]$$
$$+ |g_r(t) - g_r(s)|[\max\{\|\partial\varphi_\lambda^t(x)\|, \|\partial\varphi_\lambda^s(x)\|\}][\max\{\varphi_\lambda^t(x), \varphi_\lambda^s(x)\} + K_r]^{\frac{1}{2}}$$

が成立する．但し，$r = \sup\{\|J_\lambda^t x\|;\ 0 < \lambda \leq 1,\ 0 \leq t \leq T\}$．

[証明] $0 < \lambda \leq 1$，$x \in H$を固定する．φ_λ^tの定義(2.1)と(2.3)より，

(3.14) $$\varphi^t(v) + \frac{1}{2\lambda}\|x - v\|^2 \geq \varphi_\lambda^t(x), \qquad {}^\forall v \in H,$$

(3.15) $$\varphi^t(v) - \varphi^t(J_\lambda^t x) \geq \lambda^{-1}(x - J_\lambda^t x, v - J_\lambda^t x), \quad {}^\forall v \in H,$$

が成立することに注意する．

まず，$v_0 \in D(\varphi^0)$を固定し，(3.2)を満たす関数vを選ぶ．(3.14)において，$v = v(t)$とおけば，

(3.16) $$\varphi_\lambda^t(x) \leq M_0 + \frac{1}{2\lambda}(\|x\| + r_0)^2, \qquad {}^\forall t \in [0, T]$$

を得る．他方，(3.15)で$v = v(t)$とおけば，次を得る．

$$M_0 - \varphi^t(J_\lambda^t x) \geq \lambda^{-1}\{\|J_\lambda^t x\|^2 - \|J_\lambda^t x\|(\|x\| + r_0) - r_0\|x\|\}.$$

従って，(3.1)を利用すれば，(3.12)を得る．そこで，$r = \sup\{\|J_\lambda^t x\|;\ 0 < \lambda \leq 1,\ 0 \leq t \leq T\}\ (< \infty)$とおけば，$s \in [0, T]$に対して$J_\lambda^s x \in D(\varphi^s)$であるから，仮定Aより，次を満たす$\hat{v}_s : [0, T] \mapsto H$が存在する．

$$\|\hat{v}_s(t) - J_\lambda^s x\| \leq |g_r(t) - g_r(s)|(\varphi^s(J_\lambda^s x) + K_r)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$\varphi^t(\hat{v}_s(t)) \leq \varphi^s(J_\lambda^s x) + |h_r(t)-h_r(s)|(\varphi^s(J_\lambda^s x)+K_r), \quad 0 \leq t \leq T.$$

従って，再び (3.15) において，$v=\hat{v}_s(t)$ とおけば，

$$(3.17)\quad \begin{aligned} &|h_r(t)-h_r(s)|(\varphi_\lambda^s(x)+K_r) + \varphi^s(J_\lambda^s x)-\varphi^t(J_\lambda^t x) \\ &\geq \lambda^{-1}(x-J_\lambda^t x, J_\lambda^s x - J_\lambda^t x) - |g_r(t)-g_r(s)|\,\|\partial\varphi_\lambda^t(x)\|(\varphi_\lambda^s(x)+K_r)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

を得る．同様にして，s と t を入れ換えた不等式も成立するから，これらを加えることによって，

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}\|J_\lambda^t x - J_\lambda^s x\|^2 \leq{}& |h_r(t)-h_r(s)|(\varphi_\lambda^t(x)+\varphi_\lambda^s(x)+2K_r) \\ &+|g_r(t)-g_r(s)|\{\|\partial\varphi_\lambda^t(x)\|(\varphi_\lambda^s(x)+K_r)^{\frac{1}{2}}+\|\partial\varphi_\lambda^s(x)\|(\varphi_\lambda^t(x)+K_r)^{\frac{1}{2}}\} \end{aligned}$$

を得，(3.16) に注意すれば，$J_\lambda^t x$ は t について強連続であることがわかる．さらに，

$$\lambda^{-1}(x-J_\lambda^t x, J_\lambda^s x - J_\lambda^t x) \geq (2\lambda)^{-1}(\|x-J_\lambda^t x\|^2 - \|x-J_\lambda^s x\|^2)$$

に注意すれば，(2.2) と (3.17) より，

$$\begin{aligned} &|h_r(t)-h_r(s)|(\varphi_\lambda^s(x)+K_r) + |g_r(t)-g_r(s)|\,\|\partial\varphi_\lambda^t(x)\|(\varphi_\lambda^s(x)+K_r)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \varphi_\lambda^t(x) - \varphi_\lambda^s(x) \end{aligned}$$

を得る．又，上の不等式は，s と t を入れ換えても成立するから (3.13) が得られ，同時に，$\varphi_\lambda^t(x)$ の t に関する絶対連続性も導かれる．　　　　(証明終)

系．$u:[0,T]\longrightarrow H$ を強絶対連続な関数とする．このとき，仮定Aの下で，各 $0<\lambda\leq 1$ に対して，$\varphi_\lambda^t(u(t))$ は $[0,T]$ 上絶対連続，かつ，a.e. $t\in[0,T]$ で

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{d}{dt}\varphi_\lambda^t(u(t)) - \left(\partial\varphi_\lambda^t(u(t)), \frac{d}{dt}u(t)\right)\right| \\
(3.18)\quad &\leqslant |h_r'(t)|\,(\varphi_\lambda^t(u(t)) + K_r) + |g_r'(t)|\,\|\partial\varphi_\lambda^t(u(t))\|\,(\varphi_\lambda^t(u(t)) + K_r)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

が成立する．但し，$r = \sup\{\|J_\lambda^t u(s)\|\,;\, 0<\lambda\leqslant 1,\ 0\leqslant s, t\leqslant T\}$.

[証明] (3.12) より $r<\infty$ であることに注意して，(2.4), (3.13) を利用すれば，系の主張を得る．（証明終）

注意．仮定 A の下で，補題 3.3. が成立するから，我々の仮定は，ある意味では，*Attouch-Benilan-Damlamian-Picard* [1] の結果に対する一つの十分条件を与える，と考えることができる．

§4. 定理の証明．

$\{\varphi^t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ は仮定 A を満たし，$f\in L^2(0,T;H)$，$a\in\overline{D(\varphi^0)}$ とする．さらに，$\varphi^0(a)\geqslant 0$ としても一般性を失わない．

(E) の強い解を構成するため，$\partial\varphi^t$ の Yosida 近似 $\partial\varphi_\lambda^t = \lambda^{-1}(I-J_\lambda^t)$ $(\lambda>0)$ を利用して，次の近似方程式を考える．

$$
(4.1)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}u_\lambda(t) + \partial\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) = f(t), & 0\leqslant t\leqslant T, \\ u_\lambda(0) = a. \end{cases}
$$

補題 3.3 に注意すれば，(4.1) の強い解 u_λ が一意に存在して，u_λ は $[0,T]$ 上強絶対連続であることがわかる．さらに，u_λ に関して次の評価が成立する．

補題4.1. $0<\lambda\leq 1$ に対する(4.1)の強い解を u_λ とすると,

(i) $\sup\{\|u_\lambda(t)\| ; 0<\lambda\leq 1, 0\leq t\leq T\} \leq M_1(\|a\|)$.

(ii) $\sup\{\int_0^t \varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))ds ; 0<\lambda\leq 1, 0\leq t\leq T\} \leq M_2(\|a\|)$.

(iii) $\sup\{t\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) ; 0<\lambda\leq 1, 0\leq t\leq T\} \leq M_3(\|a\|)$.

(iv) $\sup\{\int_0^T s\|\frac{d}{ds}u_\lambda(s)\|^2 ds ; 0<\lambda\leq 1\} \leq M_5(\|a\|)$.

特に, $a\in D(\varphi^0)$ ならば,

(v) $\sup\{\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t)) ; 0<\lambda\leq 1, 0\leq t\leq T\} \leq M_5(\varphi^0(a))$.

(vi) $\sup\{\int_0^T \|\frac{d}{ds}u_\lambda(s)\|^2 ds ; 0<\lambda\leq 1\} \leq M_6(\varphi^0(a))$.

但し, $M_i(\alpha)$ $(i=1,\cdots 6)$ は α に連続的に依存する正定数である.

[証明] 補題3.2 の正数 δ に対して, $m<T/\delta\leq m+1$ を満たす整数 m をとり, $t_i=i\delta$ $(i=0,1,\cdots m)$, $t_{m+1}=T$ とおく. このとき, 補題3.2 より, $0\leq i\leq m$ に対して, 正数 r_0, M と, $[t_i, t_{i+1}]$ 上の強絶対連続関数 v_i を

$$\|v_i(t)\|\leq r_0, \quad \varphi^t(v_i(t))\leq M, \quad \forall t\in[t_i, t_{i+1}]$$

を満たすように選べる. 従って, (4.1) より, a.e. $s\in[t_i, t_{i+1}]$ で,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|u_\lambda(s)-v_i(s)\|^2 &\leq (f(s)-v_i'(s), u_\lambda(s)-v_i(s))+\varphi_\lambda^s(v_i(s))-\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)) \\ &\leq M+(\|f(s)\|+\|v_i'(s)\|)(\|u_\lambda(s)-v_i(s)\|)-\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))\end{aligned} \tag{4.2}$$

を得る. 一方, (2.2), (3.1), (3.12) より, 適当な正数 C_4 をとれば,

$$-\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))\leq -\varphi^s(J_\lambda^s u_\lambda(s))\leq 2C_1\|u_\lambda(s)-v_i(s)\|+C_4 \tag{4.3}$$

が成立する. (4.3) に注意して, (4.2) を $[t_i, t]$ で積分すれば,

$$\|u_\lambda(t)-v_i(t)\|\leq\|u_\lambda(t_i)-v_i(t_i)\|+\sqrt{2(M+C_4)\delta}+\int_{t_0}^t(\|f(s)\|+\|v_i'(s)\|+2C_1)ds$$

となることがわかり，この評価式から，$0<{}^\forall\lambda\leq 1,\ 0\leq{}^\forall t\leq T$ で，

$$\|u_\lambda(t)\| \leq \|a\|+(m+1)\{2r_0+\sqrt{2(M+C_4)\delta}\}+\int_0^T(\|f(s)\|+2C_1)ds$$
$$+\sum_{j=0}^{m}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\|v_j'(s)\|ds \equiv M_1(\|a\|)$$

が成立し，(i)を得る．この結果を利用して再び(4.2)を積分すれば，評価式(ii)も得られる．

次に(iii)－(vi)を示すために，評価式(i)と(3.12)より，$r\equiv\sup\{\|J_\lambda^t u(s)\|;\ 0<\lambda\leq 1,\ 0\leq t\leq T\}<\infty$ であることに注意する．一方，(4.1)の両辺に du_λ/dt を掛ければ，

(4.4) $$\left\|\frac{d}{ds}u_\lambda(s)\right\|^2+\left(\partial\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)),\frac{d}{ds}u_\lambda(s)\right)=\left(f(s),\frac{d}{ds}u_\lambda(s)\right),\quad a.e.\ s\in[0,T]$$

を得る．他方，u_λ は強絶対連続であるから，補題3.3の系より

(4.5) $$\left|\frac{d}{ds}\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))-\left(\partial\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s)),\frac{d}{ds}u_\lambda(s)\right)\right|$$
$$\leq|h_r'(s)|(\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))+K_r)+|g_r'(s)|\|\partial\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))\|(\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))+K_r)^{\frac{1}{2}}$$

が a.e. $s\in[0,T]$ で成立する．よって(4.4),(4.5)を組合せれば，

(4.6) $$\frac{1}{2}\left\|\frac{d}{ds}u_\lambda(s)\right\|^2+\frac{d}{ds}\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))\leq k_1(s)\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))+k_2(s),\quad a.e.\ s\in[0,T].$$

但し，k_1, k_2 は λ に無関係な $[0,T]$ 上の可積分関数．

便宜上，(v),(vi)を最初に証明しよう．$a\in D(\varphi^0)$ として，(4.6)を $[0,T]$ で積分すれば，

$$\frac{1}{2}\int_0^t\left\|\frac{d}{ds}u_\lambda(s)\right\|^2ds+\varphi_\lambda^t(u_\lambda(t))\leq\varphi^0(a)+\int_0^t k_1(s)\varphi_\lambda^s(u_\lambda(s))ds+\int_0^t k_2(s)ds$$
$$\leq\left(\varphi^0(a)+\int_0^T k_2(s)ds\right)\exp\left(\int_0^t k_1(s)ds\right).$$

よって，(4.3)に注意して，(v),(vi)の評価式を得る．最後に，(iii), (iv)も，(4.6)の両辺を s 倍して積分すれば，成立する．（証明終）

［定理の証明］補題4.1が成立するから，u_λ が(E)の求める強い解に収束することは，$\partial\varphi^t$ の単調性を用いて通常の方法によって示すことができる．詳しい証明は，[2]，[13]，[14]等を参照していただきたい．

§5．応用．

Q を $R^n\times(0,T)$ の有界領域，$Q_s=Q\cap\{t=s\}$，$\Gamma_s=\partial Q\cap\{t=s\}$（$\partial Q=Q$の境界，$0<s<T$），$\Gamma=\bigcup_{0<s<T}\Gamma_s$ とおき，次の非線型問題を考える．

$$(5.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f & \text{on } Q \\ u=0 & \text{on } \Gamma \\ u(x,0)=u_0(x) & \text{on } Q_0 \end{cases}$$

但し，$p\geqq 2$．Qの滑らかさに関しては，議論を簡単にするため，各$t\in[0,T]$について，Q_tの境界∂Q_tは十分滑らかであり，Qから$Q_0\times(0,T)$上への境界までこめてC^2－級の微分同型写像

$$(x,t)\longmapsto(\xi=X(x,t),\ \tau=t)$$

が存在するとする．

定理を適用するために，$Q\subset\hat{Q}\times(0,T)$ を満たす R^n の球 $\hat{Q}$ をとり，$H=L^2(\hat{Q})$ 上で上の問題を考える．$C([0,T];L^2(Q_t))\equiv\{u\in$

$C([0,T]; L^2(\hat{Q}))$; $u(t) \in L^2(Q_t)$, $0 \le t \le T\}$ 等の記号を用いることにすれば，(5.1) に関して次の結果を得る．

<u>命題 5.1.</u> $f \in L^2(Q)$, $u_0 \in L^2(Q_0)$ とする．このとき，(5.1) の解 u で，$u \in C([0,T]; L^2(Q_t)) \cap L^p(0,T; W_0^{1,p}(Q_t))$, $t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q)$ を満たすものが一意に存在する．特に，$u_0 \in W_0^{1,p}(Q_0)$ とすれば，$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q)$ である．

[証明] $H = L^2(\hat{Q})$ 上の下半連続な凸関数 φ^t を

$$\varphi^t(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_{Q_t} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx & \text{if} \quad u \in W_0^{1,p}(Q_t) \\ + \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定義すれば，(5.1) は (E) の形に表わされる．(cf. [14])

φ^t が仮定 A を満たすことをみよう．任意の $t_0 \in [0,T]$ をとり，固定する．このとき，各 $v_0 \in D(\varphi^{t_0}) = W_0^{1,p}(Q_{t_0})$ に対して，

$$v(x,t) = \begin{cases} v_0\,(X^{-1}(X(x,t), t_0)) & \text{if} \quad x \in Q_t \\ 0 & \text{if} \quad x \in \hat{Q} - Q_t \end{cases}$$

とおけば，適当な正定数 C をとることによって

$$\|v(\cdot,t) - v(\cdot,t_0)\|_{L^2(\hat{Q})} \le C\,|t-t_0|\,\varphi^{t_0}(v_0)^{\frac{1}{p}}, \qquad {}^\forall t \in [0,T],$$

$$\varphi^t(v(\cdot,t)) \le \varphi^{t_0}(v_0) + C\,|t-t_0|\,\varphi^{t_0}(v_0), \qquad {}^\forall t \in [0,T],$$

が成立する．よって，φ^t は仮定 A を満足するから，定理を適用して命題の主張を得る．　　　　　　　　　　(証明終)

<u>注意.</u> Fujita [7] によって取り扱われた形の，non-cylindrical な

領域における非線型熱方程式に対しても，我々の定理は変数変換の必要なく適用できる．(cf. [2])

文　献

[1] H. Attouch – P. Bénilan – A. Damlamian – C. Picard, Équations d'évolution avec condition unilatérale, C. R. Acad. Sc. Paris 279 (1974), 607–609.

[2] H. Attouch – A. Damlamian, Problèmes d'évolution dans les Hilberts et application, J. Math. pures et appl. 54 (1975), 53–74.

[3] M. Biroli, Sur la solution faible du problème de Cauchy pour des inéquations d'évolution avec convexe dépendant du temps, C. R. Acad. Sc. Paris 280 (1975), 1209–1212.

[4] H. Brézis, Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires, Israel J. Math. 9 (1971), 513–534.

[5] H. Brézis, Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps, C. R. Acad. Sc. Paris 274 (1972), 310–312.

[6] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland (1973).

[7] H. Fujita, The penalty method and some nonlinear initial value problems, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, ed. by E. Zarantonello, Academic Press (1971).

[8] N. Kenmochi, Some nonlinear parabolic variational inequalities, to appear in Israel J. Math.

[9] N. Kenmochi - T. Nagai, Weak solutions for certain nonlinear time-dependent parabolic variational inequalities, Hiroshima Math. J. 5 (1975), 525-535.

[10] K. Maruo, On some evolution equations of subdifferential operators, Proc. Japan Acad. 51 (1975), 304-307.

[11] J. Moreau, Problème d'évolution associé à un convexe mobile d'un espace hilbertien, C. R. Acad. Sc. Paris 276 (1973), 791-794.

[12] J. Péralba, Un problème d'évolution relatif à un opérateur sous-différentiel dépendant du temps, C. R. Acad. Sc. Paris 275 (1972), 93-96.

[13] J. Watanabe, On certain nonlinear evolution equations, J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 446-463.

[14] Y. Yamada, On evolution equations of subdifferential operators, (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo に投稿中)